المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي
جهة مراكش- اسفي

الأولمبياد الجهوية في الرياضيات
2020

الفرض الأول باللغتين العربية والفرنسية

تاريخ التمرير: الجمعة 25 دجنبر 2020
المدة : ساعتان

المستوى الدراسي : الثالثة اعدادي
السنة الدراسية: 2020-2021

Exercice 1 (4 points)

On pose : $a=2020^{2019}+2020^{2020}+2020^{2021}$
Montrer que le nombre entier a est multiple du nombre 21.

التمرين 1 (4 نقط)

نضع : $a=2020^{2019}+2020^{2020}+2020^{2021}$
بين أن العدد a مضاعف للعدد 21.

Exercice 2 (4 points)

Déterminer tous les nombres entiers relatifs n vérifiant :

$$(2n-2021)^{2n+2020}=1$$

التمرين 2 (4 نقط)

حدد كل الأعداد الصحيحة النسبية n التي تحقق :

$$(2n-2021)^{2n+2020}=1$$

Exercice 3 (6 points)

1. Soient a et b deux nombres strictement positifs.
   Montrer que : $\sqrt{ab}\leq\dfrac{a+b}{2}$
2. Soient x , y et z trois nombres strictement positifs tels que : $x+y+z=1$.
   (a) Montrer que : $(y+z)(z+x)=z+xy$
   (b) En déduire que : $\sqrt{\dfrac{xy}{z+xy}}\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{z+x}+\dfrac{y}{y+z}\right)$
3. Montrer que : $\sqrt{\dfrac{xy}{z+xy}}+\sqrt{\dfrac{yz}{x+yz}}+\sqrt{\dfrac{zx}{y+zx}}\leq\dfrac{3}{2}$

التمرين 3 (6 نقط)

.1 ليكن a و b عددين موجبين قطعا.
بين أن : $\sqrt{ab}\leq\dfrac{a+b}{2}$

.2 ليكن x و y و z ثلاثة أعداد موجبة قطعا بحيث :
$x+y+z=1$

أ. بين أن : $(y+z)(z+x)=z+xy$

ب. استنتج أن : $\sqrt{\dfrac{xy}{z+xy}}\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{z+x}+\dfrac{y}{y+z}\right)$

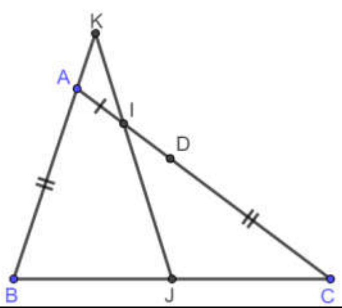
.3 بين أن : $\sqrt{\dfrac{xy}{z+xy}}+\sqrt{\dfrac{yz}{x+yz}}+\sqrt{\dfrac{zx}{y+zx}}\leq\dfrac{3}{2}$

Exercice 4 (6 points)

Soit ABC un triangle tel que $AB<AC$. Soit D le point de $[AC]$ tel que $CD=AB$. Soient I et J les milieux de $[AD]$ et $[BC]$ respectivement. Les droites (IJ) et (AB) se coupent au point K .

Montrer que le triangle AIK est isocèle.

(On pourra considérer le triangle PIJ , P étant le milieu de $[BD]$).



التمرين 4 (6 نقط)

ABC مثلث بحيث $AB<AC$. لتكن D نقطة من القطعة $[AC]$ بحيث $CD=AB$. ليكن I و J على التوالي منتصفي $[AD]$ و $[BC]$. المستقيمان (IJ) و (AB) يتقاطعان في النقطة K.

بين أن المثلث AIK متساوي الساقين.

(يمكنك اعتبار المثلث PIJ، حيث P منتصف $[BD]$)