EXAMEN BLANC N°1
ANALYSE + ALGÈBRE
Mathématiques

Niveau : 2Bac-SM
Durée : 4 Heures
Coef : 9

© 2019 : www.elmaths.com f: @elmaths1 Mathématiques : 2BAC-SM

Exercice 1 (3 points)

$A = \overline{abc}_{(x)}$ est l'écriture de l'entier A dans le système de numérotation de base x.

1 On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E)\ :\ (x+1)^2 = 9 + 5y$

a) Soit (x, y) une solution de l'équation (E).
Montrer que : $x \equiv 1[5]$ ou $x \equiv 2[5]$. **(0.5pt)**

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E). **(0.5pt)**

2 Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{Z})\quad (5k^2 + 4k - 1) \wedge (5k + 1) = (k - 3) \wedge 8$. **(1pt)**

3 Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système : $\begin{cases} \overline{121}_{(x)} = \overline{59}_{(y)} \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1\,[5] \end{cases}$ **(1pt)**

Exercice 2 (3.5 points)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on pose : $f(z) = z + \dfrac{4}{z}$.

1 Déterminer z_1 et z_2 les solutions de l'équation $f(z) = -2$, tel que $Im(z_1) > Im(z_2)$. **(0.5pt)**

2 a) Écrire les nombres z_1 et z_2 sous forme exponentielle. **(0.5pt)**

b) Montrer que : $z_1^{2002} + z_2^{2002} = -2^{2002}$ **(1pt)**

3 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a) On considère les points A, B et C d'affixes respectivement α, z_1 et z_2.
Déterminer α tel que ABC soit un triangle équilatérale. **(0.5pt)**

b) Montrer que : **(0.5pt)**

$$(\forall z \in \mathbb{C}^*)\quad f(z) = \overline{f(z)} \Leftrightarrow (z - \overline{z})(z\overline{z} - 4) = 0$$

c) En déduire l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ tel que $f(z)$ soit un réel et vérifier que les points A, B et C appartiennent à (Γ). **(0.5pt)**

Exercice 3 (7.5 points)

Partie I :

1 a) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$,
Montrer que : **(0.5pt)**

$$(\forall u \in \mathbb{R}_+^*)\qquad \frac{u}{1+u} < \ln(1+u) < u \qquad (1)$$

© 2019 : www.elmaths.com f: @elmaths1 Mathématiques : 2BAC-SM

(b) En déduire que : **(0.25pt)**

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \qquad \frac{x^2}{1+x^2} < \ln\left(1+x^2\right) < x^2 \qquad (2)$$

(c) Calculer en fonction de x où $x > 1$, les intégrales suivantes : **(1pt)**

$$I(x) = \int_1^x \frac{1}{t\left(t^2+1\right)}dt \quad ; \quad J(x) = \int_1^x \frac{\ln\left(t^2\right)}{t}dt$$

Partie II : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1 Montrer que la fonction f est continue en 0. **(0.25pt)**

2 On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

(a) En utilisant (2), montrer que : **(0.25pt)**

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) \leq F(x) \leq \frac{1}{2}x^2$$

(b) En déduire : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x^2}$. **(0.25pt)**

Partie III : On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{F(x)}{x^2} & ; \quad x \neq 0 \\ \varphi(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

1 (a) Montrer que la fonction φ est paire. **(1pt)**

(b) Vérifier que : **(0.25pt)**

$$(\forall x > 0) \quad \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \frac{2F(x) - x^2}{2x^3}$$

(c) Montrer que φ est dérivable à droite en 0 et que $\varphi'_d(0) = 0$. **(0.25pt)**

2 (a) Montrer que : **(0.5pt)**

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad \varphi'(x) = \frac{\ln\left(1+x^2\right) - 2F(x)}{x^3}$$

(b) En déduire que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad \varphi'(x) < 0$. **(0.25pt)**

3 (a) Montrer que : **(0.5pt)**

$$(\forall x \in]1;+\infty[) \ ; \ \int_1^x \frac{\ln\left(1+t^2\right) - \ln\left(t^2\right)}{t}dt = F(x) - F(1) - \ln^2 x$$

(b) Montrer que : **(0.5pt)**

$$(\forall x \in]1;+\infty[) \ ; \ \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \ln\left(\sqrt{2}\right) \leq \int_1^x \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt \leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

© 2019 : www.elmaths.com f: @elmaths1 Mathématiques : 2BAC-SM

(c) En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$. **(0.25pt)**

4 (a) Donner le tableau de variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. **(0.5pt)**

(b) Construire la courbe de (C_φ) dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ (unité $4cm$). **(1pt)**

Exercice 4 (2.5 points)

On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} I_0 &= \displaystyle\int_1^e x dx \\ I_n &= \displaystyle\int_1^e x(\ln x)^n dx \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

1 (a) Calculer I_0 et I_1. **(0.5pt)**

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad 2I_n + nI_{n-1} = e^2$. **(0.5pt)**

(c) Calculer I_2 et I_3. **(0.5pt)**

2 (a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et que : $\dfrac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \dfrac{e^2}{n+2}$. **(0.5pt)**

(b) Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$. **(0.5pt)**

Exercice 5 (3.5 points)

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'ensemble : $\mathbb{E} = \left\{ M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1 Montrer que $\mathbb{E}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ et $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$. **(0.5pt)**

2 (a) Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2 + xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$. **(0.5pt)**

(b) Déterminer les éléments inversible de $(\mathbb{E}, \times)$. **(1pt)**

3 Soit $\sigma \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, on considère l'application ψ définie par :

$$\psi \ : \ \begin{array}{c} \mathbb{E} \to \mathbb{C} \\ M_{(a,b)} \mapsto a + \sigma b \end{array}$$

(a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{E}, +)$ vers $(\mathbb{C}, +)$. **(0.5pt)**

(b) Déterminer σ tel que ψ soit un homomorphisme de $(\mathbb{E}, \times)$ vers $(\mathbb{C}, \times)$. **(1pt)**

Pour le fichier source LaTeX: 5$
Pour acheter le fichier source LaTeX contacter nous ici :
elmaths.info@gmail.com
www.facebook.com/elmaths1
www.elmaths.com