Exercice n°1 (4pts)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{7}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 On a $u_0 = 2$, donc :

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{7} = \frac{1}{2}\times 2 + \frac{1}{7} = \boxed{\frac{8}{7}} \text{ et } u_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{7} = \frac{1}{2}\times\frac{8}{7} + \frac{1}{7} = \boxed{\frac{5}{7}}$$

2 **a** Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 2$, donc $u_0 - \frac{2}{7} = 2 - \frac{2}{7} = \frac{12}{7}$, alors $u_0 - \frac{2}{7} \geq 0$.

Supposons que : $u_n - \frac{2}{7} \geq 0$, et montrons que : $u_{n+1} - \frac{2}{7} \geq 0$.

On a : $u_{n+1} - \frac{2}{7} = u_n + \frac{2}{7} - \frac{2}{7} = u_n \geq 0$, car $u_n \geq \frac{2}{7}$

Par principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} : u_n - \frac{2}{7} \geq 0}$

b pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{7} - u_n \\ &= \frac{1}{2}u_n - u_n + \frac{1}{7} \\ &= \frac{1-2}{2}u_n + \frac{1}{7} \\ &= \frac{-1}{2}u_n + \frac{1}{7} \\ &= \boxed{-\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{7}\right)} \end{aligned}$$

On sait que : $u_n - \frac{2}{7} \geq 0$, alors $-\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{7}\right) \leq 0$, alors $u_{n+1} - u_n \leq 0$, donc $u_{n+1} \leq u_n$

D'où : $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$

3 Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minoré par $\frac{2}{7}$, donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}}$

4 **a** On a : $v_0 = u_0 - \frac{2}{7} = 2 - \frac{2}{7} = \frac{12}{7}$, d'où $\boxed{v_0 = \frac{12}{7}}$

b Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{7} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{7} - \frac{2}{7} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{7} = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{7}\right) = \boxed{\frac{1}{2}v_n}$$

D'où : $\boxed{(v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{1}{2}}$

c On sait que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $v_0 = \frac{12}{7}$, donc

$$v_n = v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{12}{7}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Puisque : $v_n = u_n - \frac{2}{7}$, alors $u_n = v_n + \frac{2}{7}$, d'où : $\boxed{u_n = \left(\frac{12}{7}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{7}}$

5 Puisque $0 < \frac{1}{2} < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, alors : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{12}{7}\times 0 + \frac{2}{7} = \frac{2}{7}}$

Exercice n°2 (4pts)

On a : $card(\Omega) = A_8^2 = \frac{8!}{5!} = 56$ **www.elmaths.com**

1 A : "Les deux boules tirées sont rouges" $\to (RR)$,

alors : $card(A) = A_3^2 = \frac{3!}{1!} = 6$, alors : $\boxed{P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{6}{56}}$

B : "La première boule tirée est rouge", $\to (RR)$ ou (RV),

alors : $card(B) = A_3^2 + A_3^1A_5^1 = \frac{3!}{1!} + \frac{3!5!}{2!4!} = 21$, alors : $\boxed{P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{21}{56}}$

2 C : "La deuxième boule tirée est verte", $\to (VV)$ ou (RV),

alors : $card(C) = A_5^2 + A_3^1A_5^1 = \frac{5!}{3!} + \frac{3!5!}{2!4!} = 35$, alors : $\boxed{P(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)} = \frac{35}{56}}$

3 $B\cap C$: "La première boule tirée est rouge et la deuxième boule tirée est verte", $\to (RV)$,

donc : $card(B\cap C) = A_3^1A_5^1 = \frac{3!5!}{2!4!} = 15$, alors : $\boxed{P(B\cap C) = \frac{card(B\cap C)}{card(\Omega)} = \frac{15}{56}}$

4 On sait que : $P(B\cap C) = \frac{15}{56}$ et $P(B)\times P(C) = \frac{21}{56}\times\frac{35}{56} = \frac{15}{64}$, donc $P(B\cap C) \neq P(B)\times P(C)$.

donc : $\boxed{\text{les événements } B \text{ et } C \text{ ne sont pas indépendants}}$

Exercice n°3 (12pts)

Partie I : On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x$

1 On a g est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors pour tout x de $\mathbb{R}$: $g'(x) = e^x - 1$

2 a Si $g'(x) = 0$, alors $e^x - 1 = 0$, alors $e^x = 1$, alors $x = 0$, alors on a :

- Si $x \geq 0$, alors $e^x \geq e^0$ (car $x \longmapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$), alors $e^x \geq 1$, alors $e^x - 1 \geq 0$
- Si $x \leq 0$, alors $e^x \leq e^0$ (car $x \longmapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$), alors $e^x \leq 1$, alors $e^x - 1 \leq 0$

Finalement, pour tout x de $\mathbb{R}^+$: $g'(x) \geq 0$ et pour tout x de $\mathbb{R}^-$: $g'(x) \leq 0$

b On a : $g(0) = e^0 - 0 = 1$,et on a

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x - x = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = (+\infty)(+\infty - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x - x = 0 - (-\infty) = +\infty$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

c) D'après le tableau de variation de g, on déduit que : $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} g\left(x\right) = g\left(0\right) = 1$, alors pour tout x de $\mathbb{R}$: $g(x) \geq 1$.

Partie II :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)e^{-x}+(x-1)$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) a) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x+1\right)e^{-x} = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} x-1 = -\infty$,

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x+1\right)e^{-x} + \left(x-1\right) = \left(-\infty\right) + \left(-\infty\right) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right) = -\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f\left(x\right)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x}e^{-x} + \dfrac{x-1}{x}$, or : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{x} = 1$,

alors $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x}e^{-x} + \dfrac{x-1}{x} = 1\times\left(+\infty\right)+1 = +\infty$, d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f\left(x\right)}{x} = +\infty$

b) Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f\left(x\right)}{x} = +\infty$, alors la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

2) a) On sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-1\right) = +\infty$,

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x+1\right)e^{-x} + \left(x-1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} + e^{-x} + \left(x-1\right) = 0+0+\left(+\infty\right) = +\infty$,

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f\left(x\right) - \left(x-1\right)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(xe^{-x}+e^{-x}\right) = 0+0 = 0$

b) Or $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f\left(x\right) - \left(x-1\right)\right) = 0$, alors la droite $y = x-1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

3) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit et somme des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$) et on a :

$$\begin{aligned} f'\left(x\right) &= \left(x+1\right)'e^{-x} + \left(x+1\right)\left(e^{-x}\right)' + \left(x-1\right)' \\ &= e^{-x} - \left(x+1\right)e^{-x} + 1 \\ &= 1 - xe^{-x} \\ &= e^{-x}(e^{x}-1) \\ &= \frac{e^{x}-1}{e^{x}} \\ &= \frac{g(x)}{e^{x}} \end{aligned}$$

b) D'après la question **I)2)c)**, on a pour tout x de $\mathbb{R}$: $g(x) \geq 1 > 0$, or $e^{x} > 0$, alors pour tout x de $\mathbb{R}$: $\dfrac{g(x)}{e^{x}} > 0$, d'où $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Le tableau de variation de f.

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

d Une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0 est : $y = f(0) + f'(0)(x-0)$, or $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, alors : $\boxed{(T): \quad y = x}$.

e On a :

$$\begin{aligned} f(x) = x - 1 &\Leftrightarrow (x+1)e^{-x} + (x-1) = x - 1 \\ &\Leftrightarrow (x+1)e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{x = -1} \end{aligned}$$

Donc les coordonnées du point d'intersection de (C_f) et de la droite (Δ) d'équation : $y = x-1$ est $(-1; f(-1))$ c'est à dire $(-1; -2)$

4 a Pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{e^x}$, alors f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ (quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $e^x \neq 0$), alors pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{g'(x)e^x - (e^x)' g(x)}{e^{2x}} = \frac{(e^x - 1)e^x - e^x(e^x - x)}{e^{2x}} = \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x} + xe^x}{e^{2x}} \\ &= \frac{-e^x + xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(x-1)}{e^{2x}} = \frac{(x-1)}{e^x} = \boxed{e^{-x}(x-1)} \end{aligned}$$

b On a : $f''(1) = 0$, et pour tout x de $\mathbb{R}$: $e^{-x} > 0$, alors on a :
Si $x > 1$, alors $x - 1 > 0$, alors $e^{-x}(x-1) >$, alors $f''(x) > 0$.
Si $x < 1$, alors $x - 1 < 0$, alors $e^{-x}(x-1) <$, alors $f''(x) < 0$.
Donc $f''(x)$ change de signe au voisinage de 1, or $f(1) = \dfrac{2}{e}$

alors : $\boxed{I\left(1; \dfrac{2}{e}\right) \text{ est un point d'inflexion de la courbe } (C)}$

www.elmaths.com

5 Dans la figure ci-dessous (C_f) est la courbe représentative de f dans le repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

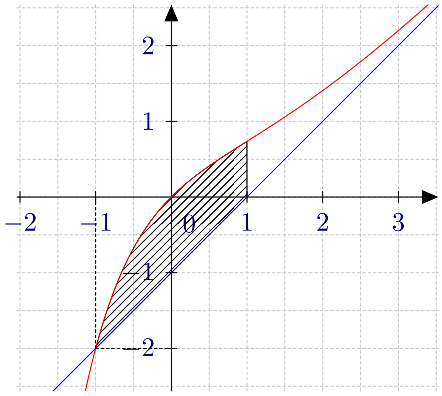
a Par l'intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (x+1)e^{-x}dx &= \int_{-1}^{1} (x+1)\left(-e^{-x}\right)' dx \\ &= \left[-e^{-x}(x+1)\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} e^{-x}dx = \left(-2e^{-1} - 0\right) + \left[-e^{-x}\right]_{-1}^{1} \\ &= -2e^{-1} - e^{-1} + e^{1} = e - 3e^{-1} = \boxed{e - \frac{3}{e}} \end{aligned}$$

b L'aire $\mathcal{A}$ de la partie hachurée de la figure est celle de la partie du plan limitée par (C_f) et la droite (Δ) d'équation : $y = x-1$ et les droites d'équations respectives : $x = -1$ et $x = 1$
alors : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left|f(x) - (x-1)\right| dx$, et d'après la figure, pour tout x de $[-1; 1]$: $f(x) \geq x-1$, c'est à dire pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) - (x-1) \geq 0$, alors :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{-1}^{1} \left|f(x) - (x-1)\right| dx \\
&= \int_{-1}^{1} f(x) - (x-1)\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} (x+1)\, e^{-x} + (x-1) - (x-1)\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} (x+1)\, e^{-x} dx
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{A} = \boxed{e - \frac{3}{e}}
$$



www.elmaths.com