

Corrigé d'exercice 1 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, -1, -1)$, $B(0, -2, 1)$ et $C(1, -2, 0)$.

- 1 a On a : $\overrightarrow{AB}(0 - 1; -2 - (-1); 1 - (-1))$, donc $\overrightarrow{AB}(-1; -1; 2)$
On a : $\overrightarrow{AC}(1 - 1; -2 - (-1); 0 - (-1))$, donc $\overrightarrow{AC}(0; -1; 1)$, d'où :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (-1 \times 1 - 2 \times (-1))\vec{i} - (-1 \times 1 - 2 \times 0)\vec{j} + (-1 \times (-1) - 0 \times (-1))\vec{k} \\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \boxed{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}\end{aligned}$$

- b On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ vecteur normal du plan (ABC) .
Donc l'équation cartésienne du plan (ABC) s'écrit : $x + y + z + d = 0$.
Puisque $A \in (ABC)$, alors $x_A + y_A + z_A + d = 0$, donc $1 - 1 - 1 + d = 0$, donc $d = 1$
D'où : $\boxed{(ABC) : x + y + z + 1 = 0}$

- 2 Soit (S) la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 1 = 0$.

Le centre de la sphère (S) est : $\Omega\left(-\frac{-4}{2}, \frac{-2}{2}, -\frac{-2}{2}\right)$, donc $\boxed{\Omega(2, -1, 1)}$

Le rayon la sphère (S) est : $R = \frac{\sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-2)^2 - 4 \times 1}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \boxed{\sqrt{5}}$

- 3 a On a : $d(\Omega, (ABC)) = \frac{|x_\Omega + y_\Omega + z_\Omega + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|2 - 1 + 1 + 1|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \boxed{\sqrt{3}}$

- b On a : $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{3}$ et $R = \sqrt{5}$, donc : $d(\Omega, (ABC)) < R$
Donc $\boxed{\text{le plan } (ABC) \text{ coupe la sphère } (S) \text{ selon un cercle } (\Gamma)}$

Corrigé d'exercice 2 (3 points)

- 1 Le discriminant Δ de l'équation est : $\Delta = 2^2 - 4 \times 4 = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$.
Donc les deux solutions sont :

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{2} = \boxed{1 + \sqrt{3}i} \\ z_2 &= \frac{2 - 2\sqrt{3}i}{2} = \boxed{1 - \sqrt{3}i}\end{aligned}$$

- 2 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 1 - i\sqrt{3}$, $b = 2 + 2i$, $c = \sqrt{3} + i$ et $d = -2 + 2\sqrt{3}$.

- a On a : $a - d = (1 - i\sqrt{3}) - (-2 + 2\sqrt{3})$
 $a - d = 1 - i\sqrt{3} + 2 - 2\sqrt{3}$
 $a - d = 3 - i\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$
 $a - d = -\sqrt{3}(-\sqrt{3} + i + 2)$

$$a - d = -\sqrt{3}((\sqrt{3} + i) - (-2 + 2\sqrt{3}))$$

Donc : $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$

b) On a : $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$, donc $\frac{a - d}{c - d} = -\sqrt{3} \in \mathbb{R}$.

Donc : les points A , C et D sont alignés.

3) Puisque $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{3}$, alors :

$$\begin{aligned} z_{M'} &= e^{i\frac{-\pi}{3}} z_M \Leftrightarrow z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \\ &\Leftrightarrow z' = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z \\ &\Leftrightarrow z' = \frac{1}{2}az \end{aligned}$$

4) Soient H l'image de B par la translation R , h son affixe et P le point d'affixe p tel que $p = a - c$.

a) Puisque $H(h)$ est l'image de $B(b)$ par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{3}$, alors :

$$\begin{aligned} z_H &= e^{i\frac{-\pi}{3}} z_B \Leftrightarrow h = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (2 + 2i) \\ &\Leftrightarrow h = (1 - i\sqrt{3})(1 + i) \\ &\Leftrightarrow h = 1 + i - i\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow h = 1[-i + 1 - \sqrt{3} - i\sqrt{3}] \\ &\Leftrightarrow h = i[1 - i\sqrt{3} - \sqrt{3} - i] \\ &\Leftrightarrow h = i[(1 - i\sqrt{3}) - (\sqrt{3} + i)] \\ &\Leftrightarrow h = i(a - c) = ip \end{aligned}$$

b) On a : $h = ip$, alors $\frac{h}{p} = i$, donc $\frac{h}{p} = \left[1; \frac{\pi}{2} \right]$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{h}{p} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{h}{p}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |h| = |p| \\ \arg\left(\frac{z_H - z_O}{z_P - z_O}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z_H - z_O| = |z_P - z_O| \\ \arg\left(\frac{z_H - z_O}{z_P - z_O}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OH = OP \\ \left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

Donc le triangle OHP est rectangle et isocèle en O

Corrigé d'exercice 3 (3 points)

1) On a : $\text{card}(\Omega) = C_{10}^3 = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$; $\text{card}(A) = C_3^3 = \frac{3!}{0!3!} = 1$

$$\text{card}(B) = C_3^3 + C_6^3 = 1 + \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 1 + 20 = 21$$

Donc :
$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{120} \quad ; \quad p(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{21}{120} = \frac{7}{40}$$

2 On a : $\text{card}(C) = C_3^2 \times C_7^1 + C_6^2 \times C_4^1 + C_3^3 + C_6^3 = 102$

Donc :
$$p(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{102}{120} = \frac{17}{20}$$

Corrigé d'exercice 4 (11 points)

Première partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$
et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1cm)

1 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \\ &= 0 + \frac{1}{2} - (-\infty) + \frac{1}{2}(+\infty) \\ &= +\infty + (+\infty) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Donc l'axe des ordonnées ($x = 0$) est une asymptote verticale à la courbe (C)

2 a Pour tout x de $]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \ln x \ln x - \ln x \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x \end{aligned}$$

b On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x \\ &= +\infty + (+\infty - 1) \times +\infty \\ &= +\infty + \infty \\ &= +\infty \end{aligned}$$

c $\forall x \in]0, +\infty[$, on a :
$$\frac{(\ln x)^2}{x} = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$$

On déduit que :
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{\ln u}{u}\right)^2 ; \text{ avec } u = \sqrt{x} \end{aligned}$$

Donc :
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \times 0^2 = 0$$

d) On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, et on a :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2x} - \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2} \frac{(\ln x)^2}{x} \\
 &= 1 + 0 - 0 + \frac{1}{2} \times 0 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 - x \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right) \ln x \\
 &= \frac{1}{2} + (+\infty - 1)(+\infty) \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

Donc la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y = x$.

3

a) Pour tout x de $]0, +\infty[$, on a :

x	0	1	$+\infty$
$x - 1$		-	+
$\ln x$	-	0	+
$(x-1) + \ln x$	-	0	+

Donc $\boxed{\text{pour tout } x \text{ de }]0, 1]; (x-1) + \ln x \leq 0}$; $\boxed{\text{pour tout } x \text{ de } [1, +\infty[; (x-1) + \ln x \geq 0}$

b) On a f est dérivable sur $]0, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} (2(\ln x)'(\ln x)^{2-1}) \\
 &= 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \ln x \\
 &= \boxed{\frac{x - 1 + \ln x}{x}}
 \end{aligned}$$

c) Si x de $]0; 1]$, donc d'après la question 1 - a), on a $x - 1 + \ln x \leq 0$, donc $f'(x) \leq 0$.
 Si x de $[1; +\infty[$, donc d'après la question 1 - a), on a $x - 1 + \ln x \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$.
 donc f est croissante sur $[1; +\infty[$ et décroissante sur $]0; 1]$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$

4

a On f' est dérivable sur $]0, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{x-1+\ln x}{x} \right)' \\ &= \frac{(x-1+\ln x)'x - (x-1+\ln x)(x)'}{x^2} \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x - (x-1+\ln x)}{x^2} \\ &= \frac{x+1-x+1-\ln x}{x^2} \\ &= \frac{2-\ln x}{x^2} \end{aligned}$$

b On a : $\forall x \in]0, +\infty[: x^2 > 0$, donc le signe de $f''(x)$ est le même que celui de $2 - \ln x$ sur $]0, +\infty[$, alors on a :

$$\begin{aligned} 2 - \ln x \geq 0 &\Leftrightarrow \ln x \leq 2 \\ &\Leftrightarrow x \leq e^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 - \ln x \leq 0 &\Leftrightarrow \ln x \geq 2 \\ &\Leftrightarrow x \geq e^2 \end{aligned}$$

Donc on a :

x	0	e^2	$+\infty$
$f''(x)$		+	-

On a $f''(e^2) = 0$ et f'' change de signe au voisinage de e^2 . Or :

$$\begin{aligned} f(e^2) &= e^2 + \frac{1}{2} - \ln e^2 + \frac{1}{2}(\ln e^2)^2 \\ &= e^2 + \frac{1}{2} - 2 + 2 \\ &= e^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $A\left(e^2; e^2 + \frac{1}{2}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe (C)

5

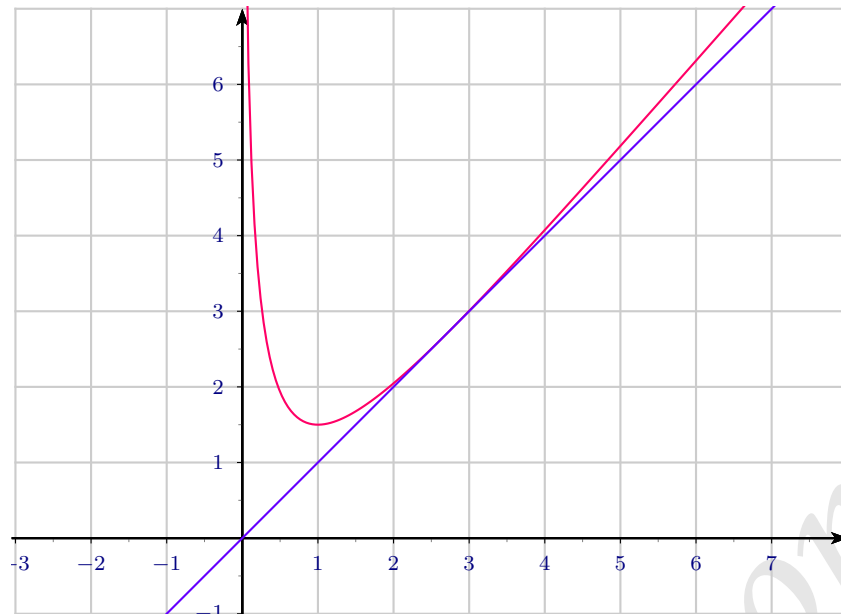
a Pour tout x de $]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 - x \\ &= \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \\ &= \frac{1}{2}(1^2 - 2 \times 1 \times \ln x + \ln^2 x) \\ &= \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2 \end{aligned}$$

On a : $\forall x \in]0, +\infty[: (\ln x - 1)^2 \geq 0$, donc : $\forall x \in]0, +\infty[/ f(x) - x \geq 0$

Donc la courbe (C) est au-dessus de la droite (Δ)

b) La figure.



6

a) On a H est dérivable sur $]0, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned} H'(x) &= \ln x + \frac{x}{x} - 1 \\ &= \ln x + 1 - 1 \\ &= \ln x \\ &= h(x) \end{aligned}$$

Donc la fonction H est une primitive de la fonction h sur $]0, +\infty[$

b) A l'aide d'une intégrale par parties, on a :

$$\begin{aligned} \int_1^e (\ln x)^2 dx &= \int_1^e (x \ln x - x)' \ln x dx \\ &= [(x \ln x - x) \ln x]_1^e - \int_1^e \frac{x \ln x - x}{x} dx \\ &= [\underbrace{(e \ln e - e)}_{=0} \ln e - \underbrace{(\ln 1 - 1) \ln 1}_{=0}] - \int_1^e \ln x - 1 dx \\ &= - \int_1^e (x)' \ln x + \int_1^e (x)' dx \\ &= -[x \ln x]_1^e + \int_1^e 1 dx + [x]_1^e \\ &= -[e \ln e - 1 \ln 1] + [e - 1] + [e - 1] \\ &= -[e - 0] + e - 1 + e - 1 \\ &= \boxed{e - 2} \end{aligned}$$

c) L'aire du domaine plan limité par (C) et (Δ) et les droites $x = 1$ et $x = e$ est :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^e |f(x) - x| dx = \int_1^e f(x) - x dx ; \text{ car } \forall x \in]0, +\infty[: f(x) - x \geq 0 \\ \mathcal{A} &= \int_1^e \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2} \ln^2 x dx = \int_1^e \frac{1}{2} dx - \int_1^e \ln x dx + \int_1^e \frac{1}{2} \ln^2 x dx \\ \mathcal{A} &= \frac{1}{2} [x]_1^e - [x \ln x - x]_1^e + \frac{1}{2} (e - 2) = \frac{1}{2} (e - 1) - (e - e - 0 + 1) + \frac{1}{2} (e - 2) \\ \mathcal{A} &= \frac{2e - 5}{2} \end{aligned}$$

Donc : $\mathcal{A} = \frac{2e - 5}{2} \text{ cm}^2$

Deuxième partie :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1

- a) Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1$, donc $1 \leq u_0 \leq e$.

Supposons que : $1 \leq u_n \leq e$, et montrons que : $1 \leq u_{n+1} \leq e$

On a : $1 \leq u_n \leq e$, donc $f(1) \leq f(u_n) \leq f(e)$, car f est continue et croissante sur $[1; +\infty[$.

Donc : $\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq e$, or $1 \leq \frac{3}{2}$, alors : $1 \leq u_{n+1} \leq e$

D'après le principe du raisonnement par récurrence : pour tout n de $\mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq e$

- b) D'après la question 5-a), on a : $\forall x \in]0; +\infty[: f(x) - x > 0$, et puisque : $u_n \in]0; +\infty[$, alors pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} f(u_n) - u_n &> 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0 \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n \end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

- c) Puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majoré par e .

Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente

2

La fonction f est continue et croissante sur $[1, e]$, donc $f([1; e]) = [f(1); f(e)] = \left[\frac{3}{2}; e\right]$

alors $f([1; e]) \subset [1; e]$, or $u_0 \in [1; e]$, et puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, donc la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est le nombre réel ℓ la solution de l'équation $f(\ell) = \ell$.

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\Leftrightarrow f(\ell) - \ell = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\ln \ell - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln \ell - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln \ell = 1 \\ &\Leftrightarrow \ell = e \end{aligned}$$

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$