Corrigé d'exercice 2 (3.5 points)

Soit m un nombre complexe non réel ($m \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$).

I- On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z définie par :

$$(E) : z^2 - (1+i)(1+m)z + 2im = 0$$

1 **a** On a :

$$\begin{aligned}\Delta &= ((1+i)(1+m))^2 - 4 \times 2im \\ &= 2i\left(1 + 2m + m^2\right) - 8im \\ &= 2i + 4im + 2im^2 - 8im \\ &= 2i - 4im + 2im^2 \\ &= 2i(m-1)^2 \\ &= [(1+i)(m-1)]^2\end{aligned}$$

Puisque $m \notin \mathbb{R}$, alors $m \neq 1$, donc $\Delta \neq 0$.

b On a : $\sqrt{\Delta} = (1+i)(m-1)$, alors :

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{(1+i)(1+m) + (1+i)(m-1)}{2}; \\ &= \frac{2m(1+i)}{2}; \\ &= m(1+i);\end{aligned} \qquad \begin{aligned}z_2 &= \frac{(1+i)(1+m) - (1+i)(m-1)}{2} \\ &= \frac{2(1+i)}{2} \\ &= 1+i\end{aligned}$$

2 On suppose dans cette question que $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$.

a Déterminer le module et un argument de $z_1 + z_2$.

Puisque $0 < \theta < \pi$, alors $0 < \dfrac{\theta}{2} < \pi$, donc :

$$\begin{aligned}z_1 + z_2 &= (1+i)(1 + \cos\theta + i\sin\theta) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\frac{1+\cos\theta}{2\cos\frac{\theta}{2}} + i\frac{\sin\theta}{2\cos\frac{\theta}{2}}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}} + \frac{2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\theta}{2}} \\ &= 2\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\end{aligned}$$

D'où $|z_1 + z_2| = 2\sqrt{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$ et $\arg(z_1 + z_2) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2}$

b Montrer que si $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ alors $z_1 + z_2 = 2i$.

On a : $z_1 z_2 = m(1+i)(1+i) = 2im$.

Si $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$, alors $m = e^{i\theta} \in i\mathbb{R}$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, alors $m = i$

D'où $z_1 + z_2 = m(1+i) + (1+i) = (1+m)(1+i) = (1+i)(1+i) = 2i$

II- Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(0;\overline{u},\overline{v})$.
On considère les points suivants : A le point d'affixe $a=1+i$, B le point d'affixe $b=(1+i)m$, C le point d'affixe $c=1-i$, D l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et Ω le milieu du segment $[CD]$.

1 **a** Montrer que l'affixe du point Ω est $\omega=\frac{(1-i)(1-m)}{2}$.

Puisque D l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, alors

$$z_D=e^{i\frac{\pi}{2}}z_B=i(1+i)m$$

On a Ω le milieu du segment $[CD]$, alors $z_\Omega=\frac{z_D+z_C}{2}$, donc

$$\omega=\frac{im(1+i)+1-i}{2}=\frac{-m(1-i)+(1-i)}{2}=\frac{(1-i)(1-m)}{2}$$

b Calculer $\frac{b-a}{\omega}$.

$$\frac{b-a}{\omega}=\frac{(1+i)\,m-(1+i)}{\frac{(1-i)(1-m)}{2}}=\frac{2\,(1+i)\,(m-1)}{(1-i)\,(1-m)}=\frac{2\,(1+i)}{(i-1)}=-2i$$

c En déduire que $(O\Omega)\perp(AB)$ et que $AB=2O\Omega$.

On a : $\frac{b-a}{\omega}=\frac{z_B-z_A}{z_\Omega-z_O}=-2i$

Donc $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_\Omega-z_O}\right)=-\frac{\pi}{2}$ et $\left|\frac{z_B-z_A}{z_\Omega-z_O}\right|=2$

D'où $(O\Omega)\perp(AB)$ et $AB=2O\Omega$

2 La droite $(O\Omega)$ coupe la droite (AB) au point H d'affixe h.

a Puisque $H\in(AB)$, alors les points H,A et B sont alignés, donc $\arg\left(\frac{z_H-z_A}{z_B-z_A}\right)=k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, d'où $\frac{h-a}{b-a}\in\mathbb{R}$

Puisque $(O\Omega)\perp(AB)$ et $H\in(O\Omega)$, alors $(OH)\perp(AB)$, donc $\arg\left(\frac{z_H-z_O}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, d'où $\frac{h}{b-a}\in i\mathbb{R}$

b En déduire h en fonction de m.

Puisque $\frac{h-a}{b-a}\in\mathbb{R}$ et $\frac{h}{b-a}\in i\mathbb{R}$ alors $\exists(x,y)\in(\mathbb{R}^*)^2$ tels que : $\frac{h}{b-a}=x$ et $\frac{h-a}{b-a}=iy$.
On a :

$$\begin{aligned}\frac{h-a}{b-a}=x &\Leftrightarrow \frac{h}{b-a}-\frac{a}{b-a}=x\\ &\Leftrightarrow iy-\frac{1}{m-1}=x\\ &\Leftrightarrow -x+iy=\frac{1}{m-1} \qquad (1)\\ &\Leftrightarrow \overline{-x+iy}=\overline{\frac{1}{m-1}}\\ &\Leftrightarrow -x-iy=\frac{1}{\overline{m}-1} \qquad (2)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(1)+(2) &\Leftrightarrow -2x = \frac{1}{m-1} + \frac{1}{\overline{m}-1} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{m-1} + \frac{1}{\overline{m}-1}\right) \\
&\Leftrightarrow h = x\,(b-a) + a \\
&\Leftrightarrow h = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{m-1} + \frac{1}{\overline{m}-1}\right)(1+i)\,(m-1) + 1 + i \\
&\Leftrightarrow h = \frac{-1}{2}\left(\frac{m+\overline{m}-2}{\overline{m}-1}\right)(1+i) + (1+i) \\
&\Leftrightarrow h = (1+i)\left(\frac{-1}{2}\left(\frac{m+\overline{m}-2}{\overline{m}-1}\right) + 1\right) \\
&\Leftrightarrow h = (1+i)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{-m-\overline{m}+2+2\overline{m}-2}{\overline{m}-1}\right)\right) \\
&\Leftrightarrow h = \frac{(1+i)}{2}\left(\frac{\overline{m}-m}{\overline{m}-1}\right)
\end{aligned}
$$