

Corrigé d'exercice 3 (3 points)

On admet que 2969 (l'année amazighe actuelle) est un nombre premier.
Soit n et m deux entiers naturels vérifiant : $n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$

1 On suppose dans cette question que 2969 ne divise pas n .

a) Comme 2969 ne divise pas n , alors $n \wedge 2969 = 1$, donc d'après le théorème de BEZOUT :

$$\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2 ; u \times n + v \times 2969 = 1$$

$$\Rightarrow \exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2 ; u \times n - 1 = v \times 2969 \Rightarrow 2969 \text{ divise } u \times n - 1$$

$$\Rightarrow \exists u \in \mathbb{Z} ; u \times n \equiv 1[2969]$$

b) D'après (1 - a) on a : $u \times n \equiv 1[2969] \Rightarrow (u \times n)^8 \equiv 1^8[2969] \Rightarrow (u \times n)^8 \equiv 1[2969]$.

On a : $n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$

$$\Rightarrow (u \times n)^8 + (u \times m)^8 \equiv 0[2969] \Rightarrow (u \times m)^8 \equiv -(u \times n)^8[2969]$$

$$\Rightarrow (u \times m)^8 \equiv -1[2969]$$

$$\Rightarrow (u \times m)^{8 \times 371} \equiv (-1)^{371}[2969]$$

$$\Rightarrow (u \times m)^{2968} \equiv -1[2969]$$

c) On suppose que 2969 divise $u \times m$, alors $u \times m \equiv 0[2969]$, alors

$$(u \times m)^8 \equiv 0[2969].$$

Ce qui est absurde car $(u \times m)^8 \equiv -1[2969]$. Donc

$$2969 \text{ ne divise pas } u \times m.$$

d) Comme 2969 est un nombre premier et $u \times m \wedge 2969 = 1$ alors, d'après le Théorème de Fermat $(u \times m)^{2969-1} \equiv 1[2969]$, alors

$$(u \times m)^{2968} \equiv 1[2969].$$

2 a) Si 2969 ne divise pas n , on a :

$$\text{D'après (1 - b): } (u \times m)^{2968} \equiv -1[2969].$$

$$\text{D'après (1 - d): } (u \times m)^{2968} \equiv 1[2969].$$

$$\text{Donc } 0 \equiv -2[2969] \Rightarrow 2 \equiv 0[2969] \Rightarrow 2969 \text{ divise } 2.$$

Ce qui est absurde, donc

$$2969 \text{ divise } n.$$

b) On a 2969 divise n , alors $n \equiv 0[2969] \Rightarrow n^8 \equiv 0[2969]$.

$$(\Rightarrow) \text{ Si : } n^8 + m^8 \equiv 0[2969], \text{ alors } m^8 \equiv -n^8[2969] \equiv 0[2969],$$

alors $m \equiv 0[2969]$, car 2969 est un nombre premier.

$$(\Leftarrow) \text{ Si : } n \equiv 0[2969] \text{ et } m \equiv 0[2969], \text{ alors } n^8 \equiv 0[2969] \text{ et } m^8 \equiv 0[2969],$$

alors $n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$. Finalement

$$n^8 + m^8 \equiv 0[2969] \Leftrightarrow n \equiv 0[2969] \text{ et } m \equiv 0[2969]$$