

Corrigé d'exercice 1 (3.5 points)

- 1 a Soient $((x, y) \in \mathbb{R}^2) ((a, b) \in \mathbb{R}^2)$, On a :

$$\begin{aligned}(a + bi) * (x + yi) &= ax + (a^2y + x^2b)i \\ &= xa + (x^2b + a^2y)i \\ &= (x + yi) * (a + bi)\end{aligned}$$

Donc la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{C}$.

- b Soient $((x, y) \in \mathbb{R}^2) ((a, b) \in \mathbb{R}^2) ((z, t) \in \mathbb{R}^2)$, On a :

$$\begin{aligned}[(x + yi) * (a + bi)] * (z + ti) &= [xa + (x^2b + a^2y)i] * (z + ti) \\ &= xaz + [x^2a^2t + z^2(x^2b + a^2y)]i \\ &= xaz + (x^2a^2t + z^2x^2b + z^2a^2y)i \\ (x + yi) * [(a + bi) * (z + ti)] &= (x + yi) * [az + (a^2t + z^2b)i] \\ &= xaz + (x^2(a^2t + z^2b) + a^2z^2y)i \\ &= xaz + (x^2a^2t + x^2z^2b + a^2z^2y)i\end{aligned}$$

Alors $[(x + yi) * (a + bi)] * (z + ti) = (x + yi) * [(a + bi) * (z + ti)]$

D'où la loi $*$ est associative sur $\mathbb{C}$.

- c Soient $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, $e = (a + bi) \in \mathbb{C}$ et $x \neq 0$

$$\begin{aligned}(x + yi) * e &= x + yi \Leftrightarrow xa + (x^2b + a^2y)i = x + yi \\ \Leftrightarrow xa &= x \quad ; \quad x^2b + a^2y = y \\ \Leftrightarrow a &= 1 \quad ; \quad b = 0 \\ \Leftrightarrow e &= 1\end{aligned}$$

Si $x = 0$ On a $(0 + yi) * (1 + 0i) = 0 \times 1 + (0^2 \times 0 + 1^2y)i = 0 + yi$

Or la loi $*$ est commutative sur $\mathbb{C}$, Alors $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + yi) * e = e * (x + yi)$

D'où $e = 1$ est un élément neutre de la loi $*$.

- d Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ On a :

$$\begin{aligned}(x + yi) * (a + bi) &= e \Leftrightarrow xa + (x^2b + a^2y)i = 1 \\ \Leftrightarrow xa &= 1 \quad ; \quad x^2b + a^2y = 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1}{x} \quad ; \quad b = \frac{-a^2y}{x^2} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1}{x} \quad ; \quad b = \frac{-y}{x^4}\end{aligned}$$

Or la loi $*$ est commutative sur $\mathbb{C}$, Alors : $(x + yi) * (a + bi) = e \Leftrightarrow (a + bi) * (x + yi) = e$

Donc le nombre complexe $x + yi$ admet le nombre complexe comme symétrique pour la loi $*$.

- 2 a Soient $(a, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $(b, y) \in \mathbb{R}^2$, $(z_1, z_2) \in E$ tels que $z_1 = x + yi$, $z_2 = a + bi$
On a : $z_1 * z_2 = (x + yi) * (a + bi) = xa + (x^2b + a^2y)i \in E$, car $xa \in \mathbb{R}_+^*$ et $x^2b + a^2y \in \mathbb{R}$.
Donc $z_1 * z_2 \in E$, d'où E est stable pour la loi $*$ dans $\mathbb{C}$.
- b On a E est stable pour $*$ dans $\mathbb{C}$, donc d'après 1)a)b)c)d), la loi $*$ est :

- (i) La loi $*$ est associative sur E ,
- (ii) La loi $*$ est commutative sur E ,
- (iii) La loi $*$ est admet un élément neutre $e = 1 \in E$,
- (iv) $\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} : x + yi$ admet un élément symétrique : $\frac{1}{x} - \frac{y}{x^4}i \in E$
car $(x > 0)$

De (i), (ii), (iii) et (iv) on constate que $(E, *)$ est un groupe commutatif.

3 On a $G \neq \emptyset$ car $1 + 0i = 1 \in G$, et $G \subset E$ car $1 > 0$

Soient $(b, y) \in \mathbb{R}^2$, $(z_3, z_4) \in G$ tels que $z_3 = 1 + yi$, $z_4 = 1 + bi$

On a : $z_3 * z_4 = (1 + yi) * (1 + bi) = 1 + (b + y)i \in G$, car $b + y \in \mathbb{R}$

Donc G est un sous-groupe de $(E, *)$.

4 a) On a $F \in M_2(\mathbb{R})$. Soient $(x, a) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $(y, b) \in \mathbb{R}^2$.

Soient $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \in F$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in F$

On a : $A \times B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb + ya \\ 0 & xa \end{pmatrix}$

Comme $x, a \in \mathbb{R}_+^*$, alors $xa \in \mathbb{R}_+^*$, or $xb + ya \in \mathbb{R}$, alors $A \times B \in F$

D'où F est stable pour la loi $\times$ dans $M_2(\mathbb{R})$.

b) Soit φ l'application de E vers F définie par $\varphi(x + yi) = M_2(x^2, y) = \begin{pmatrix} x^2 & y \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$

Soient $z_1, z_2 \in E$ tels que $z_1 = x + yi$, $z_2 = a + bi$, $x, a \in \mathbb{R}_+^*$ et $y, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\varphi(z_1 * z_2) = \varphi(xa + (x^2b + a^2y)i) = M_2(x^2a^2, x^2b + a^2y)$$

$$\varphi(z_1) \times \varphi(z_2) = M_2(x^2, y) \times M_2(a^2, b) = \begin{pmatrix} x^2y^2 & x^2b + a^2y \\ 0 & x^2y^2 \end{pmatrix} = M_2(x^2a^2, x^2b + a^2y)$$

Donc $\varphi(z_1 * z_2) = \varphi(z_1) \times \varphi(z_2)$

D'où φ est un morphisme de $(E, *)$ vers $(F, \times)$.

Soit $M(a, b) \in F$ et $z \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(z) = M(a, b) &\Leftrightarrow M(x^2, y) = M(a, b) \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2 & y \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow x^2 = a ; y = b \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{a} ; y = b \\ &\Leftrightarrow z = \sqrt{a} + bi. \end{aligned}$$

D'où φ est bijective de E vers F .

Alors φ est un isomorphisme de $(E, *)$ vers $(F, \times)$.

- c) Puisque φ est un isomorphisme de $(E, *)$ vers $(F, \times)$ et $(E, *)$ est un groupe commutatif. Alors $(F, \times)$ est un groupe commutatif.