© 2019 : www.elmaths.com f: @elmaths1 Mathématiques : 2BAC-SM

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que : $\exists! x_n \in \left]\frac{\pi}{2}+n\pi;\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi\right[\ : \ \tan x_n = x_n$
2. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par : $(\forall n \geq 0) \quad u_n = \frac{\pi}{2}+(n+1)\pi - x_n$
   - a) Montrer que : $(\forall n \geq 0) \ : \ x_n = (n+1)\pi + \arctan x_n$
   - b) En déduire que : $(\forall n \geq 0) \ : \ u_n = \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)$
   - c) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$
   - d) En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2

Partie I :

1. On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$
   - a) Étudier les variations de la fonction g.
   - b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} ln(1+e^x)$
   - a) Montrer que : $\lim\limits_{n\to-\infty} f(x) = 1$
   - b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = 0$
   - c) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = e^{-x}\left(\frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)\right)$$
   - d) Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
3. Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. (On prendra $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 2cm$)
4. - a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à déterminer.
   - b) Donner les variations de f^{-1} sur J.
   - c) Tracer la courbe de f^{-1} dans le même repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Partie II : On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \leq 0 \quad u_{n+1} = f(u_n)$

1. - a) Montrer que si $x \in \left[\frac{1}{2};\frac{3}{5}\right]$, alors $f(x) \in \left[\frac{1}{2};\frac{3}{5}\right]$.
   - b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α, et que dans $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{3}{5}$.

© 2019 : www.elmaths.com : @elmaths1 : Mathématiques : 2BAC-SM

2 Étudier le signe de : $f(x) - x$

3 Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$

(a) Montrer que v_n et w_n sont adjacentes.

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente, et que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Partie III :

1 (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) + f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$

(b) En déduire la fonction primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$, qui s'annule en 0.

2 (a) Montrer que : $(\forall n \geq 2)(\exists! x_n \in \mathbb{R}_+^*) \quad f(x_n) = \dfrac{1}{n}$

(b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

(c) Démontrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ n'est majorée, puis en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

3 On considère la suite $(y_n)_{n\geq 2}$ définie par : $y_n = \displaystyle\int_0^{x_n} f(x)\,dx$

(a) Montrer que la suite $(y_n)_{n\geq 2}$ est croissante, et que : $(\forall n \geq 2) \quad 0 \leq y_n \leq 2\ln 2$.

(b) Montrer que $(y_n)_{n\geq 2}$ est convergente et que : $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 2\ln 2$.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{u_n + 2}$

1 Étudier les variations de la fonction $f \mapsto \dfrac{e^x}{x+2}$.

2 (a) Montrer que : $f([0;1]) \subset [0;1]$.

(b) Montrer que : $\forall x \in [0;1]; \quad \dfrac{1}{4} \leq f'(x) \leq \dfrac{2}{3}$

(c) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0;1]$

3 (a) Montrer que : $\forall n\ \mathbb{N}; \quad u_n \in [0;1]$.

(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

(c) Montrer que : $\forall n\ \mathbb{N}; \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{2}{3}|u_n - \alpha|$.

(d) Montrer que : $\forall n\ \mathbb{N}; \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

(e) Déterminer les entiers n pour que u_n soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Exercice 4

Partie I : Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. Pour tout couple (a,b) de $\mathbb{E}^2$, on pose : $a \perp b = a + b - ab\sqrt{2}$

1 Vérifier que pour tout couple (a,b) de $\mathbb{E}^2$: $a \perp b = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)$

www.elmaths.com

© 2019 : www.elmaths.com f: @elmaths1 Mathématiques : 2BAC-SM

2 Montrer que $(\mathbb{E}, \perp)$ est un sous-groupe commutatif.

Partie II : On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire, de zéro la matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel réel.

On considère l'ensemble : $\mathcal{F} = \left\{ M(a) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-a & a \\ a & \sqrt{2}-a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{E} \right\}$.

On pose : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1 (a) Vérifier que : $A^2 = -2A$ et que $M(a) = I + \frac{a}{\sqrt{2}}A$

(b) Montrer que $\mathcal{F}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

2 On considère l'application φ de $(\mathbb{E}, \perp)$ vers $(\mathcal{F}, \times)$ définie par : $\varphi(a) = M(a)$

(a) Montrer que φ est une isomorphisme de vers

(b) En déduire la structure de $(\mathcal{F}, \times)$

Exercice 5

1 On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : \quad 195x - 232y = 1$

(a) Déterminer le plus grand diviseur commun des nombres 195 et 232.

(b) Montrer que l'ensemble solution de l'équation (E) est :

$$S = \left\{ (163 + 232k; 137 + 195k) / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(c) Trouver l'unique entier naturel d vérifiant : $0 \leq d \leq 232$ et $195d \equiv 1[232]$

2 Montrer que le nombre 233 est premier.

3 Soit A l'ensemble des nombres entiers compris entre 0 et 232.

On considère l'application f de A vers A définie par : quel que soit a de A, $f(a)$ est le reste de la division euclidienne du nombre a^{195} par 233.

(a) Montrer que : $(\forall a \in A \setminus \{0\})$; $\quad a^{232} \equiv 1\,[233]$

(b) Montrer que : $\forall (a, b) \in A^2$, si $f(a) = f(b)$, alors $a = b$

(c) Soient a et b deux éléments de A tel que : $f(a) = b$, déterminer a en fonction de b.

(d) En déduire que f est une bijection, puis déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 6

On pose $E = \{0, 1, 2, ..., 25\}$. Soient a et b deux éléments de E.
On considère l'application de E vers E définie par : $(\forall n \in E); \quad \varphi(n) = an + b$

1 On suppose que : $\varphi(5) = 10$ et $\varphi(19) = 14$.

(a) Montrer que : $14a \equiv 4[26]$.

(b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $14x - 26y = 1$.

(c) En déduire la valeur de a et la valeur de b.

www.elmaths.com

© 2019 : www.elmaths.com f: @elmaths1 Mathématiques : 2BAC-SM

2 On suppose que $a = 15$ et $b = 3$.

(a) Montrer que si $\varphi(n) = \varphi(p)$, alors $n = p$.

(b) Soient n et m deux éléments de E tel que $\varphi(n) = m$, déterminer n en fonction de m.

(c) En déduire que φ est une bijection de E vers E, puis déterminer sa bijection réciproque φ^{-1}.

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(t) = \ln(1+t) + \dfrac{t^2}{1+t^2}$

1 (a) Montrer que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

(b) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f(t)}{t}$.

(c) Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

2 Soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation $(E_n) : \quad f(t) = \dfrac{1}{n}$.

(a) Montrer que l'équation (E_n) admet une solution unique a_n.

(b) Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur $[0, +\infty[$

(c) Donner le tableau de variations de f^{-1}.

(d) En déduire les variations de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$, puis déterminer sa limite.

3 (a) Calculer $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t)}{t}$.

(b) En déduire la limite de suite la $(na_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 8

Soit n un nombre entier naturel non nul.

On considère la fonction h_n définie sur $]0, +\infty[$ par : $h_n(x) = \dfrac{xe^{-x}}{x^n} - x^n$, et la fonction φ définie sur $]0, +\infty[$ par : $\varphi_n(x) = e^{-x} - x^{2n-1}$

1 (a) Vérifier que : $(\forall n \geq 1)\,(\forall x > 0) \;:\; h_n(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi_n(x) = 0$

(b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, l'équation $h_n(x) = 0$ admet une solution unique u_n, tel que : $0 < u_n < 1$

2 (a) Montrer que : $(\forall n \geq 1) \;:\; \ln(u_n) = -\dfrac{u_n}{2n-1}$

(b) En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = 2xe^x$

1 (a) Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} de $[0, 1]$ sur un intervalle J à déterminer.

(b) Donner le tableau de variations de f^{-1}.

2 Montrer que : $\exists! \alpha \in [0, 1] : \alpha e^{\alpha} = 1$, et que $\alpha \neq 0$.

3 On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 = \alpha$ et $(\forall n \geq 0) \;\; u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$

www.elmaths.com

© 2019 : www.elmaths.com : @elmaths1 : Mathématiques : 2BAC-SM

(a) Montrer que : $(\forall n \geq 0) \quad u_n \in]0,1]$.

(b) Montrer que : $(\forall x \in [0,1]) \quad f(x) \geq x$.

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante.

(d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et calculer sa limite.

4 Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$

(a) Montrer que : $(\forall n \geq 0) \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n e^{-u_{n+1}}$.

(b) En déduire que : $(\forall n \geq 0) \quad u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$.

(c) Montrer que : $(\forall n \geq 0) \quad u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(d) En déduire que la suite $(S_n)_n$ est convergente et que sa limite ℓ vérifiant : $\alpha \leq \ell \leq 2$

Exercice 10

On considère la fonction : $\begin{cases} f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t} e^{-t^2} dt, & x \neq 0 \\ f(0) = \ln 2 \end{cases}$

1 Montrer que la fonction f est paire.

2 (a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $f'(x) = \frac{e^{-4x^2}}{x}\left(1 - e^{3x^2}\right)$

(b) En déduire le sens de variation de f sur $]0,+\infty[$.

3 (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad e^x \geq x + 1$

(b) Montrer que : $(\forall t > 0) \quad \frac{1}{t} - t \leq \frac{1}{t} e^{-t^2} \leq \frac{1}{t}$

(c) Montrer que : $(\forall x > 0) \quad \ln 2 - \frac{3x^2}{2} \leq f(x) \leq \ln 2$

(d) Montrer que f est continue et dérivable en 0.

4 (a) Montrer que : $(\forall t \geq 1) \quad e^{-t^2} \leq e^{-t}$

(b) En déduire que : $(\forall x \geq 1) \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$

(c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

5 (a) Donner le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(b) Tracer la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé.

Exercice 11

On rappelle que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif et $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est la matrice nulle $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et dont l'unité est la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel réel.

On considère l'ensemble $\mathbb{E} = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5a & a-3b \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

www.elmaths.com

© 2019 : www.elmaths.com : @elmaths1 Mathématiques : 2BAC-SM

1. (a) Montrer que $(\mathbb{E},+,.)$ est un sous-espace vectoriel réel.
   (b) Déterminer une base de l'espace vectoriel $(\mathbb{E},+,.)$, puis en déduire sa dimension.

2. Soit α un nombre complexe n'appartenant pas à $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $(1,\alpha)$ est une base de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C},+,.)$.

3. On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ vers $\mathbb{E}^*=\mathbb{E}\setminus\{M(0,0)\}$ définie par :

$$(\forall z=a+b\alpha\in\mathbb{C}^*)\quad \varphi(z)=M(a,b)$$

   (a) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(\mathbb{E}^*,\times)$.
   (b) Montrer que φ est une bijection.

4. On prend $\alpha=-1+i$.
   (a) Montrer que $(\mathbb{E}^*,\times)$ est un groupe commutatif.
   (b) Montrer que $(\mathbb{E}^*,+,\times)$ est corps commutatif.
   (c) Déterminer l'inverse de $M(a,b)$.

Exercice 12

n est un entier naturel non nul.

Partie I : On considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_n(x)=1+x-e^{-nx}$

1. (a) Étudier les variation de la fonction g_n.
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$, puis donner le tableau de variations de la fonction g_n.
   (c) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g_n(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
   (d) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}(g_n(x)-x-1)$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
   (e) En déduire que $x_0=0$ est l'unique solution de l'équation $g_n(x)=0$.
   (f) Tracer la courbe de la fonction g_1 dans un repère orthonormé.

2. (a) Montrer que : $(\forall n\geq 1)\,(\exists! x_n>0)\quad g_n(x)=1$.
   (b) Étudier le signe de $g_{n+1}(x)-g_n(x)$.
   (c) En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
   (d) Montrer que : $(\forall n\geq 1)\quad x_n=e^{-nx_n}$.
   (e) En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.

Partie II : On considère la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ définie par : $y_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*;\quad y_{n+1}=e^{-y_n}$

1. Montrer que x_1 est l'unique solution de l'équation $e^{-x}=x$ et que $\dfrac{1}{e}\leq x_1\leq 1$.

2. (a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*;\quad \dfrac{1}{e}\leq y_n\leq 1$
   (b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*;\quad |y_{n+1}-x_1|\leq e^{-\frac{1}{e}}|y_n-x_1|$
   (c) Montrer que la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie III : On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $F(0)=\dfrac{1}{2}$ et $(\forall x>0)\,;F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{1}{g_1(t)}dt$

www.elmaths.com

© 2019 : www.elmaths.com : @elmaths1 Mathématiques : 2BAC-SM

1. (a) Montrer que : $(\forall t > 0)$; $\dfrac{1}{1+t} \leq \dfrac{1}{g_1(t)} \leq \dfrac{1}{t}$

   (b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

2. (a) Montrer que : $(\forall t > 0)$; $1 - t \leq e^{-t} \leq 1 - t + \dfrac{t^2}{2}$

   (b) En déduire que F est continue à droite au point 0.

   (c) Étudier la dérivabilité de la fonction F à droite au point 0.

3. (a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$.

   (b) Étudier les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}_+$.

   (c) Construire la courbe de la fonction F dans une repère orthonormé.

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. (a) Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement les résultats obtenus.

   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ et donner le tableau de variations de f.

   (c) Calculer $f''(x)$, puis montrer que l'équation $f''(x) = 0$ admet deux solutions sont 1 et β tels que : $-\dfrac{1}{5} < \beta < 0$.

   (d) En déduire le point d'inflexion de la courbe (C), puis tracer la courbe (C).

2. (a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$. Soit g sa bijection réciproque.

   (b) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donner le sens de variation de g et calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

   (c) Montrer que : $(\forall n \geq 1)\,(\exists! \alpha_n < 0)$; $g\left(\dfrac{1}{n}\right) = \alpha_n$

   (d) Calculer α_1 et déterminer le sens de variation de la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$.

   (e) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ n'est pas minorée, puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$.

3. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose : $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$

   (a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$, puis en déduire le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$.

   (b) Vérifier que : $(\forall t \leq 0)$; $0 \leq f(t) \leq e^t$, puis en déduire que : $(\forall x \leq 0)$; $-1 \leq F(x) \leq 0$.

   (c) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

   $$(\forall x \geq 0);\ F(x) = f(x) - 1 + 2I(x) \text{ où } I(x) = \int_0^x \frac{te^t}{(1+t^2)^2}dt$$

   (d) En déduire : $\lim\limits_{n \to +\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{F(x)}{x}$.

www.elmaths.com

© 2019 : www.elmaths.com : @elmaths1 : Mathématiques : 2BAC-SM

(e) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\int_{\frac{1}{n}}^{1} g(t)\,dt + \frac{\alpha_n}{n} = F(\alpha_n)$.

(f) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $-1 \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} g(t)\,dt \leq 0$.

Exercice 14

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
À tout point M d'affixe z différente de 0, on associe le point M' d'affixe $z' = -\frac{1}{\bar{z}}$.

1. Montrer que les points O, M et M' sont alignés.
2. Montrer que : $\overline{z'+1} = \frac{1}{z}(z-1)$
3. On considère les points A d'affixe 1 et B d'affixe -1. Soit (C) le cercle de centre A qui passe par le point O. On suppose que le point M appartient au cercle (C) et différente de O.
   (a) Montrer que : $|z-1| = 1$ et que $|z'+1| = |z'|$, puis interpréter géométriquement ce résultat.
   (b) En déduire une construction géométrique du point M' connaissant le point M.
4. Soit M_1 le symétrique de M par rapport à l'axe réel (l'axe des abscisses).
   (a) Calculer $\frac{z'+1}{z'-1}$ en fonction de z.
   (b) Calculer $\arg\left(\frac{z'+1}{z'-1}\right)$ en fonction de la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{M_1A}; \overrightarrow{M_1B}\right)$.
   (c) Comparer les mesures d'angles $\left(\overrightarrow{M_1A}; \overrightarrow{M_1B}\right)$ et $\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right)$.
   (d) Montrer que M' appartient au cercle circonscrit au triangle AMB.

Exercice 15

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$.
   (a) Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectivement i, $2+3i$ et $2-3i$.
   (a) On considère R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe de A' l'image de A par la rotation R.
   (b) Montrer que les points A', B et C sont alignés.
   (c) Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre B qui transforme C en A.
   (d) Vérifier que : $h^{-1} o R(A) = C$, puis donner l'écriture complexe de l'application $h^{-1} o R$.

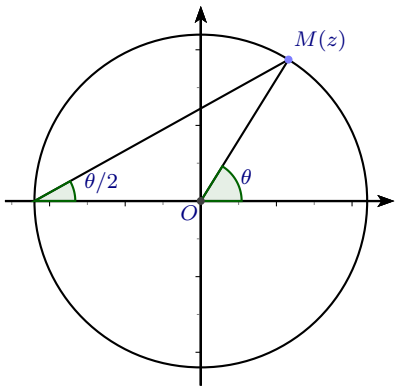
Exercice 16

Soit z un nombre complexe non nul tel que : $z = a + ib = [\rho, \theta]$.

1. En utilisant la figure ci-dessous, montrer que : $\theta \equiv 2\arctan\left(\frac{b}{a+\rho}\right)[2\pi]$

© 2019 : www.elmaths.com : @elmaths1 Mathématiques : 2BAC-SM

2 En déduire que : $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$ (indication : poser $z = \sqrt{3} + i$).



www.elmaths.com